第５講　平面図形

1　二等辺三角形 ABC において，AB＝AC＝2，BC＝3 とする。

直線 AC 上に，C とは異なる点 D を ∠ABC＝∠ABD を満たすようにとると，

$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\frac{\fbox{ア}}{\fbox{イ}}$ である。△ABD と △BCD において，∠ABD＝∠BCD で ∠D は共通

であるから，$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\frac{\fbox{ウ}}{\fbox{エ}}$ である。$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}$ に着目するとCD＝$\frac{\fbox{オカ}}{\fbox{キ}}$

である。

△BCD の外接円を O とし，点 B における円 O の接線と直線 AC との交点を E とすると，点 E は辺 AC の A の側の延長上にある。このとき

$$\angle \mathrm{DBE}=\frac{\fbox{ク}}{\fbox{ケ}}\angle \mathrm{ABE}$$

であるから，$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BE}}=\frac{\fbox{コ}}{\fbox{サ}}$ である。

（次ページに続く）

　また，線分 BE は線分 **シ** と同じ長さである。 シ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　AB　　①　AD　　②　AE　　③　BC　　④　CD

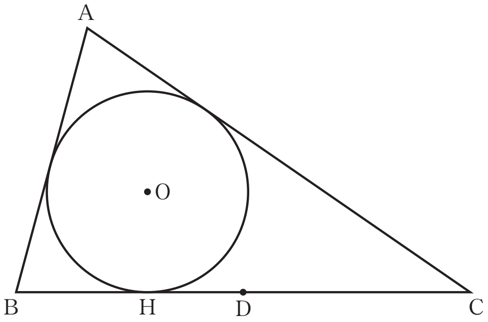
したがって，$\mathrm{DE}=\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

　辺 BC の中点を M とし，線分 EM と線分 BD の交点を F とすると

$$\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{EF}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

である。

2　△ABC の内心を O，内接円 O と辺 BC の接点を H とする。辺 BC 上に点 D をとる。ただし，D は B，C と異なる点とする。



参考図

△ABD の内心を P とし，内接円 P と辺 BD の接点を E とする。△ACD の内心を Q とし，内接円 Q と辺 CD の接点を F とする。

PQ を直径とする円と 2 点 D，H の間の関係で △ABC がどのような形でも成り立つものを調べる。

次の［オ］には，下の⓪～③のうちから当てはまるものを一つ選べ。

$\angle ADP = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \angle ADB$，$\angle ADQ = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}} \angle ADC$ であるから，PQ を直径とする円と点 D の関係について正しい選択肢は［オ］である。

⓪　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，D はその円の内部にある。
①　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，D はその円周上にある。
②　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，D はその円の外部にある。
③　D が辺 BC 上のどの位置にあるかに応じて，D は，円の内部，円周上，円の外部のどの場合もある。

（次ページに続く）

次の［カ］～［サ］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

BH＝$\frac{1}{2}$(AB＋［カ］－［キ］)　……………………………①

BE＝$\frac{1}{2}$(AB＋［ク］－［ケ］)　……………………………②

DF＝$\frac{1}{2}$(CD＋［コ］－［サ］)　……………………………③

である。

⓪　AC　　①　AD　　②　BC　　③　BD

次の［シ］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

①～③から，EH＝［シ］であることがわかる。

⓪　FQ　　①　OP　　②　$\frac{1}{2}$EP　　③　DF

次の［ス］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

PQ の中点を J とする。J を通り辺 BC に垂直な直線と BC の交点を K とすると，K は EF の中点であるから，HK＝［ス］である。

⓪　DK　　①　$\frac{1}{2}$JK　　②　EH　　③　$\frac{1}{2}$FK

（次ページに続く）

次の［セ］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

HK＝［ス］に着目すると，PQ を直径とする円と点 H の関係について，正しい選択肢は［セ］である。

⓪　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，H はその円の内部にある。

①　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，H はその円周上にある。

②　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，H はその円の外部にある。

③　D が辺 BC 上のどの位置にあるかに応じて，H は，円の内部，円周上，円の外部のどの場合もある。

第５講　平面図形

1　△BCD において，角の二等分線の性質より，

BC：BD＝AC：AD，つまり 3：BD＝2：AD より，3AD＝2BD　よって，$\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

また，△ABD∽△BCD より，$\dfrac{\text{BD}}{\text{CD}}=\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

AD＝x とおくと，$\dfrac{\text{AD}}{\text{CD}}=\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}}\cdot\dfrac{\text{BD}}{\text{CD}}$ より，$\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

よって，$9x=4(x+2)$，つまり $x=\dfrac{8}{5}$ より，CD＝AC＋AD＝$2+\dfrac{8}{5}=\mathbf{\dfrac{18}{5}}$

接弦定理より，∠DBE＝∠DCB

また，二等辺三角形 ABC において ∠ACB＝∠ABC であり，

仮定より ∠ABC＝∠ABD であることから，∠DBE＝∠ABD

よって，∠DBE＝$\mathbf{\dfrac{1}{2}}$∠ABE

したがって，△ABE において角の二等分線の性質より，

AB：BE＝AD：DE，つまり 2：BE＝$\dfrac{8}{5}$：DE であるから，2DE＝$\dfrac{8}{5}$BE

よって，$\dfrac{\text{DE}}{\text{BE}}=\mathbf{\dfrac{4}{5}}$

また，∠EAB＝∠ABC＋∠ACB＝2∠ABC より，

△ABE は AE＝BE の二等辺三角形である（②）．

これと $\dfrac{\text{DE}}{\text{BE}}=\dfrac{4}{5}$ より，$\dfrac{\text{DE}}{\text{AE}}=\dfrac{4}{5}$ であるから，AD：DE＝1：4　つまり　DE＝4AD

AD＝$\dfrac{8}{5}$ より，DE＝$4\times\dfrac{8}{5}=\mathbf{\dfrac{32}{5}}$

メネラウスの定理から，$\dfrac{\text{CB}}{\text{BM}}\cdot\dfrac{\text{MF}}{\text{FE}}\cdot\dfrac{\text{ED}}{\text{DC}}=1$　つまり　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\text{FM}}{\text{EF}}\cdot\dfrac{\frac{32}{5}}{\frac{18}{5}}=1$

よって，$\dfrac{\text{FM}}{\text{EF}}=\mathbf{\dfrac{9}{32}}$

2　内心は三角形の内角の二等分線の交点であることより，

$\angle\text{ADP}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}\angle\text{ADB}$，$\angle\text{ADQ}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}\angle\text{ADC}$

よって，$\angle\text{PDQ}=\angle\text{ADP}+\angle\text{ADQ}=\dfrac{1}{2}(\angle\text{ADB}+\angle\text{ADC})=\dfrac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$ より，

PQ を直径とする円の円周角上に点 D がある（①）．

また，BH＝x とおくと，円の接線の長さの性質から，

$\text{AC}=(\text{AB}-x)+(\text{BC}-x)$　つまり　$x=\dfrac{1}{2}(\text{AB}+\text{BC}-\text{AC})$

$BH = x = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$ …①（⓶，⓪）

同様に，$BE = \frac{1}{2}(AB + BD - AD)$ …②（⓷，⓵）

$DF = \frac{1}{2}(CD + AD - AC)$ …③（⓵，⓪）

よって，①〜③より，

$EH = BH - BE$

$= \frac{1}{2}(AB + BC - AC - AB - BD + AD)$

$= \frac{1}{2}(BC - BD - AC + AD) = \frac{1}{2}(CD + AD - AC) = DF$ であるから

$EH = DF$（⓷）

また，$PE \perp BC$，$QF \perp BC$ であり，$JK \perp BC$ であることから，$PE /\!/ JK /\!/ QF$

よって，J が PQ の中点であるから，K は EF の中点.

したがって，$HK = EK - EH = KF - DF = DK$ より，$HK = DK$（⓪）

$HK = DK$，および $JK \perp HD$ に着目すると，$\triangle JHK \equiv \triangle JDK$ より，

$\triangle JDH$ は $JD = JH$ の二等辺三角形.

JD は PQ を直径とする円の半径より，JH もこの円の半径.

したがって，H はこの円の円周上にある（⓵）.